Тема 1. Введение в математический анализ

Лекция 1. Пределы и непрерывность.

§1. Предел переменной величины.

Определение 1. Число a называется ***пределом переменной величины*** x_n, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер **n**, что начиная с него, для всех x_n будет выполняться неравенство:

$$\boxed{|x_n - a| < \varepsilon} \quad \text{т.е.} \quad \boxed{\lim x_n = a}$$

Определение 2. ***Бесконечно малой*** называется такая переменная величина α_n, которая в определенный момент становится и остается по модулю меньше сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, т.е.

$$\boxed{|\alpha_n| < \varepsilon} \quad \text{или} \quad \boxed{\lim \alpha_n = 0}$$

Иначе: переменная величина α_n называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю.

Определение 3. ***Бесконечно большой*** называется такая переменная величина U_n, которая в определенный момент становится и остается по модулю больше сколь угодно большого наперед заданного числа $M > 0$, т.е.

$$\boxed{\boxed{|U_n| > M}} \quad \text{или} \quad \boxed{\lim U_n = \infty}$$

Иначе: переменная величина U_n называется бесконечно большой, если ее предел равен ∞.

Между бесконечно большой и бесконечно малой величинами существует следующая зависимость:

$$\frac{c}{\text{бесконечно малая}} = \text{бесконечно большая} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{1}{0} = \infty};$$

$$\frac{c}{\text{бесконечно большая}} = \text{бесконечно малая} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{1}{\infty} = 0},$$

где c – *const*.

Следствие: Из определения предела и бесконечно малой можно записать:

$$\lim x_n = a \;\Rightarrow\; \boxed{x_n = a + \alpha_n}$$

Свойства бесконечно малых

1. Сумма конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой на постоянную величину есть величина бесконечно малая.
3. Произведение двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

§2. Теоремы о пределах

1) Предел постоянной величины есть сама постоянная величина:

$$\boxed{\lim c = c}$$

2) Предел алгебраической суммы конечного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных:

$$\boxed{\lim(x+y-z) = \lim x + \lim y - \lim z}$$

3) Предел произведения конечного числа переменных величин равен произведению пределов этих переменных величин:

$$\boxed{\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y}$$

Следствие: постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\boxed{\lim cx = c \lim x}$$

4) Предел частного двух переменных величин равен частному пределов делимого и делителя, при условии, что предел делителя не равен нулю:

$$\boxed{\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}}, \quad \lim y \neq 0$$

5) Предел степени равен степени от предельного значения основания:

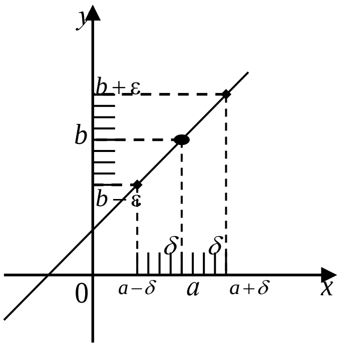
$$\boxed{\lim x^n = (\lim x)^n}$$

§3. Предел функции

Определение 1. Число **b** называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое малое $\delta > 0$, что при выполнении неравенства $\boxed{|x-a| < \delta}$, будет выполняться неравенство:

$$\boxed{|f(x)-b|<\varepsilon}, \text{ т.е. } \boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b}$$

Пример: $\lim\limits_{x\to a} x^2 = (\lim\limits_{x\to 3} x)^2 = 3^2 = 9$



$(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ – ε – окрестность точки b

$(a-\delta; a+\delta)$ – δ – окрестность точки a

Замечания. 1) Если $x \to a$, то он может оставаться или меньше a или больше a.

В связи с этим существуют так называемые односторонние пределы:

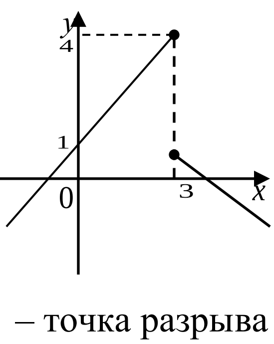
$\lim f(x) = b_1$	$\lim f(x) = b_2$
$x \to a$	$x \to a$
$x < a$	$x > a$
левосторонний	правосторонний

2) Если функция в данной точке непрерывна, то односторонние пределы равны.

3) Если функция в данной точке имеет разрыв первого рода, то скачок функции в этой точке равен модулю разности односторонних пределов:

$$\boxed{\text{скачок} = \left|\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) - \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)\right|}$$

Пример: $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = 4$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = 1$



Если $x = 3$ – точка разрыва 1-го рода, то можно указать скачок функции:

$$\left|\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)-\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)\right|=|1-4|=3$$

справа слева

§4. Вычисление пределов функции

I метод. ***Непосредственное вычисление пределов.***

Состоит в том, что вместо аргумента ***x*** подставляют его предельное значение в функцию и выполняют все необходимые операции.

Пример: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2}{x+1}=\dfrac{1^2-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$

II метод. ***Раскрытие неопределенности вида*** $\left|\frac{0}{0}\right|$

Состоит в сокращении дроби на множитель, стремящийся к нулю:

1) Если дробь содержит многочлены, то их следует разложить на линейные множители.

Пример: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\dfrac{2\cdot 1+1}{1-1}=\dfrac{3}{0}=\infty$

2) Если под знаком предела есть иррациональное выражение, то нужно умножить числитель и знаменатель на сопряженные множители.

Пример:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-(6-x)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\,(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}=$$

$$=\frac{2}{4(2+2)}=\frac{1}{8}$$

3) Если под знаком предела есть тригонометрические выражения, то следует с помощью тригонометрических тождеств, преобразовать числитель и знаменатель так, чтобы произошло сокращение.

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{\sin x}\cdot\cos x}{\cancel{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$

III метод. ***Раскрытие неопределенности вида*** $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$

Состоит в почленном делении числителя и знаменателя на переменную в наивысшей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+6}{x^3-3x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{6}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}}=$$

Пример:

$$=\frac{2+\frac{1}{\infty}+\frac{6}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}}=\frac{2+0+0}{1-0}=2$$

Три подсказки:

1. Если степени числителя и знаменателя одинаковые, то предел равен отношению коэффициентов при переменных в наивысшей степени.
2. Если степень числителя **ниже** степени знаменателя, то предел равен нулю.
3. Если степень числителя **выше** степени знаменателя, то предел равен бесконечности.

§5. Два замечательных предела

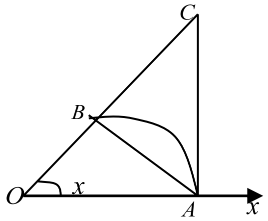
1. Первый замечательный предел.

Определение 1. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах равен единице:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1} \quad \text{или} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1}$$

Он раскрывает неопределенность вида $\left|\dfrac{0}{0}\right|$.

Доказательство



Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть $OB = OA = R$ – подвижный радиус, образующий с осью OX угол X $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Из геометрических соображений следует, что $S_{\Delta AOB} < S_{сек\, OBA} < S_{\Delta AOC}$.

Т.к. $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin x = \dfrac{1}{2} R^2 \sin x$

$$S_{сек\, AOB} = \frac{1}{2} R^2 x$$

$$S_{\Delta OCA} = \frac{1}{2} AO \cdot AC = \frac{1}{2} AO(AO \cdot \operatorname{tg} x) = \frac{1}{2} AO^2 \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x,$$

то имеем:

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x \quad \Big|: \frac{1}{2} R^2 \sin x > 0,$$

получим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{или} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Т.к. функции $\cos x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ - четные, то неравенства справедливы и при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Перейдем к пределу при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1 \ ; \quad \lim_{x\to 0} \text{Cos}x = 1.$$

На основании признака существования предела промежуточной функции имеем: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, ч. т. д.

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел $\boldsymbol{A}$ при $x \to x_0$, то функция $f(x)$ имеет тот же предел $\boldsymbol{A}$.

(без доказательства).

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x\cdot 6}{6x\cdot 4}=\dfrac{6}{4}\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}}_{==1}=\dfrac{3}{2}.$

2. Второй замечательный предел.

Определение 2. Числом ***e*** (вторым замечательным пределом) называется предел числовой последовательности:

$$\boxed{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \quad \text{или} \quad \boxed{e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Он раскрывает неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$ ($e\approx 2,718281828459045\ldots$.).

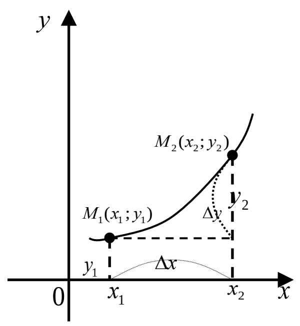
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{5n}\right)^{2n}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{2\cdot\left(-\frac{3}{5a}\right)}=$$

Пример:

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{3}{5n}=\alpha\\ n=-\dfrac{3}{5\alpha}\\ \alpha\to 0\end{array}\right| =\lim_{\alpha\to}(1+\alpha)^{-\frac{6}{5\alpha}}=\left(\lim_{\alpha\to}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\frac{6}{5}}=e^{-\frac{6}{5}}$$

§6. Приращение аргумента и функции

Определение 1. ***Приращением*** переменной величины называется разность между последующим и предыдущим значением переменной.



$\Delta x=x_2-x_1$ - (приращение аргумента);

$\Delta y=y_2-y_1$ - (приращение функции).

Выразим приращение функции через приращение аргумента:

1) $x_1=x$; $x_2=x+\Delta x$

2) $y(x_2)=y(x+\Delta x)$; $y(x_1)=x$

$\Delta y=y_2-y_1\Rightarrow\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$ или $\boxed{\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)}$

§7. Непрерывность функции

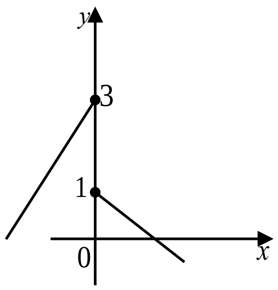
Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в некоторой точке*** x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$

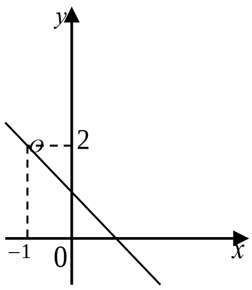
Определение 2. Функция $y = f(x)$, непрерывная в каждой точке некоторого интервала $(a;b)$ называется ***непрерывной на всем интервале***.

Определение 3. Точка, в которой нарушается непрерывность функции, называется ***точкой разрыва***.

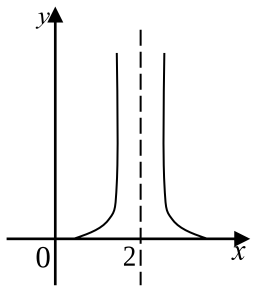
Существуют точки разрыва 1-го и 2-го рода:



$x = 0$ – точка разрыва 1 рода, функция имеет скачок в этой точке $|3-1| = 2$

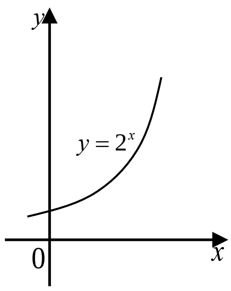


$x = -1$ – точка устранимого разрыва (к заданной функции добавляют значения функции) $y(-1) = 2$



$x = 2$ – точка разрыва 2 рода, скачка указать нельзя

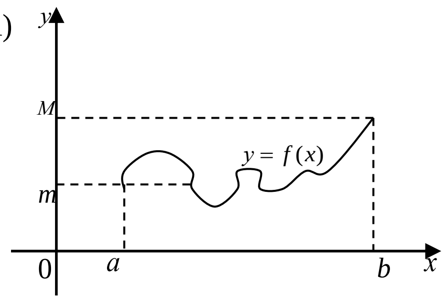
$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\textit{нарушается условие непрерывности функции}}$



функция непрерывная во всей области существования

§8. Свойства непрерывных функций на отрезке

1)

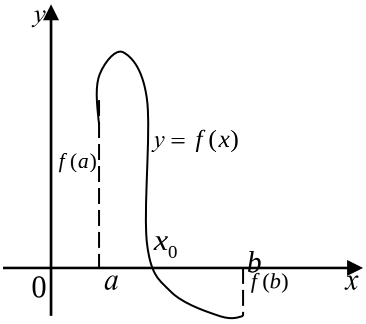


Функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

M – наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$;

m – наименьшее.

2)



Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то на этом отрезке существует, по крайней мере, одно такое значение x_0, что $f(x_0) = 0$. Если $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ и $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a;b]$, то $f(x_0) = 0$.

3) Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то:

а) функция $f(x) \pm g(x)$ - непрерывна на отрезке $[a;b]$;

б) функция $f(x) \cdot g(x)$ - непрерывна на отрезке $[a;b]$;

в) функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ - непрерывна на отрезке $[a;b]$.

4) Непрерывная функция от непрерывной функции тоже есть функция непрерывная.

Пример:

$y = 5x + 2$ – непрерывная на $(-\infty;\infty)$;

$y = \sin x$ – непрерывная на $(-\infty;\infty)$;

$y = \sin(5x + 2)$ – непрерывная на $(-\infty;\infty)$.

Замечания:

1) Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своего существования.
2) Элементарная функция может иметь разрыв только в граничных точках области существования.